

## I. Probabilité

### 1) Généralités

Lors d'une **expérience aléatoire** :

- L'**univers**  $\Omega$  est l'ensemble des **éventualités**.
- Un **événement**  $A$  est une partie de l'univers  $\Omega$ .
- Un événement **élémentaire**, est un événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement **contraire** de l'événement  $A$  est l'événement noté  $\bar{A}$  formé de tous les éléments de  $\Omega$  n'appartenant pas à  $A$ .
- L'événement  $A \cap B$  (noté aussi "A et B") est l'événement formé des éléments de  $\Omega$  appartenant à  $A$  et à  $B$ .
- L'événement  $A \cup B$  (noté aussi "A ou B") est l'événement formé des éléments de  $\Omega$  appartenant au moins à l'un des événements  $A$  ou  $B$ .
- Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits **incompatibles** si  $A \cap B = \emptyset$ .
- Si  $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$  et si à chaque éventualité  $e_i$  on associe un nombre  $p(e_i)$  tel que:  $0 \leq p(e_i) \leq 1$  et  $p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1$ , On dit que l'on a défini une **loi de probabilité** sur  $\Omega$ .
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

### 2) Propriétés :

Pour tous événements  $A$  et  $B$  :

- $P(\emptyset) = 0$  ;  $P(\Omega) = 1$
- $0 \leq p(e_i) \leq 1$  ;  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
(si  $A$  et  $B$  sont incompatibles alors  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ )
- Pour une loi **équirépartie** :  $p(A) = \frac{\text{nbre d'élèments de } A}{\text{nbre d'élément de } \Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$

### 3) Variable aléatoire

**Définition** : Une variable aléatoire  $X$  définie sur un univers  $\Omega$  est une fonction qui à chaque éventualité associe un réel  $x_i$ . La probabilité pour que  $X$  prenne la valeur  $x_i$  est alors notée  $p(X = x_i)$  ou  $p_i$ .

Définir la **loi de probabilité** de  $X$ , c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements " $X = x_i$ ".

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$
$p(X = x_i)$	$p_1$	$p_2$	...	$p_k$

- Espérance mathématique de  $X$  :  $E(X) = \sum_{i=1}^{i=k} p_i \times x_i$

- Variance de  $X$  :  $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$
- Écart-type de  $X$  :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

**Exemple :**

On lance 3 fois de suite un dé. Le joueur gagne 6 dirhams s'il n'obtient aucun 1 et aucun 2 et il perd 3 dirhams dans le cas contraire.

La variable aléatoire  $X$  égale au gain du joueur, ne peut prendre que les valeurs -3 et 6.

On a :  $p(X = 6) = \frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27}$  et  $p(X = -3) = 1 - p(X = 6) = \frac{19}{27}$

$x_i$	6	-3	Total
$p(X = x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{19}{27}$	1

$E(X) = -3 \times \frac{19}{27} + 6 \times \frac{8}{27} = -\frac{1}{3}$

$V(X) = (-3)^2 \times \frac{19}{27} + 6^2 \times \frac{8}{27} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{152}{9}$  et  $\sigma(X) = \sqrt{\frac{152}{9}} = \frac{2\sqrt{38}}{3}$

**II. Probabilités conditionnelles**

**1. Définition:**

Etant donné deux événements  $A$  et  $B$  ( $B \neq \emptyset$ ) d'un univers  $\Omega$ . On appelle probabilité de  $B$  sachant  $A$ , le réel noté  $p_A(B)$  (ou  $p(B/A)$ ) tel que :  $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

On a alors :  $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

**2. Formule des probabilités totales**

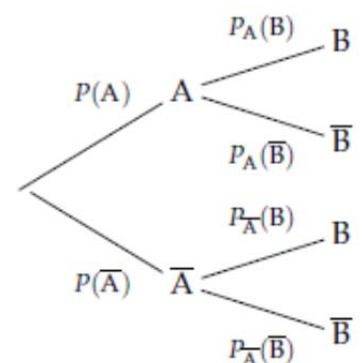
Si  $A_1; A_2; \dots; A_n$  forment une partition de  $\Omega$  (2 à 2 incompatibles et leur union forme  $\Omega$ ),

Alors pour tout événement  $B$ , on a :

$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$   
 $= p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

**3. Représentation par un arbre pondéré**

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple ( $A$  et  $\bar{A}$ ). Si on connaît les probabilités de  $B$  et  $\bar{B}$  par l'intermédiaire de  $A$  et  $\bar{A}$ , on a l'arbre suivant :



- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

$p(A) \times p_A(B) = p(A \cap B)$

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

$$p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$$

- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$$

**Exemple :**

On dispose de trois urnes A, B et C la première contient 1 boule rouge et 5 boules vertes, la deuxième contient 3 boules rouges et une boule verte, et la troisième contient 1 boule rouge et 2 boules vertes.

On choisit l'une des urnes au hasard et on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Soient A, B et C les événements correspondants au choix de l'urne. Ils forment une partition de l'univers et on a  $p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{3}$ .

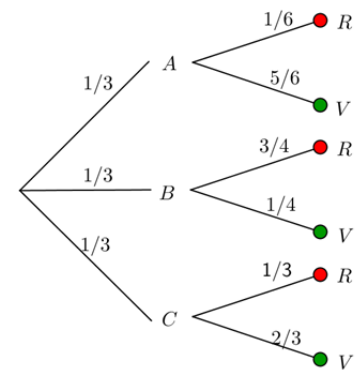
Soit R l'événement « tirer une boule rouge ». La formule des probabilités totales nous donne:

$$p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) + p(C \cap R)$$

Donc:  $p(R) = p(A) \times p_A(R) + p(B) \times p_B(R) + p(C) \times p_C(R)$ .

Or  $p_A(R) = \frac{1}{6}$ ,  $p_B(R) = \frac{3}{4}$  et  $p_C(R) = \frac{1}{3}$ .

On a donc  $p(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ .



**4. Indépendance de deux événements**

Deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$$p_A(B) = p(B) \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

**Exemple :**

Une association de 96 membres propose différentes activités à ses adhérents, dont l'athlétisme et le basketball.

Douze membres s'inscrivent pour l'athlétisme, Trente-deux pour le basketball dont quatre pour les deux.

On prend au hasard la fiche d'un adhérent. On note A et B les événements :

- A « l'adhérent est inscrit pour l'athlétisme ».
- B « l'adhérent est inscrit pour le basketball ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ? En est-il de même pour A et  $\bar{B}$  ?

On peut représenter les événements dans un tableau double entrée ci-contre

On calcule les probabilités suivantes :  $P(A \cap B)$  et  $P(A) \times P(B)$

	A	$\bar{A}$	Total
B	4	28	32
$\bar{B}$	8	56	64
Total	12	84	96

**III. Loi binomiale**

- ❖ On appelle épreuve de **Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraire l'une de l'autre)
- ❖ On appelle schéma de Bernoulli toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès  $S$  est  $p$ . Le schéma de Bernoulli consistant à répéter  $n$  fois de manière indépendante cette épreuve.

Si on note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès  $S$ , la loi de probabilité de  $X$  est appelée **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$  et est notée  $\mathcal{B}(n; p)$

- Probabilité d'obtenir  $k$  succès :  $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
- Espérance de  $X$  :  $E(X) = \bar{X} = np$
- Variance et écart-type de  $X$  :  $V(X) = np(1-p)$  ;  $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

**Exercice :**

Un sac contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On prélève au hasard et simultanément 3 boules de ce sac et on considère la variable aléatoire  $X$  associée au nombre de boules blanches tirées

1. Déterminer  $X(\Omega)$  (les valeurs  $x_i$  que peut prendre la variable  $X$ )
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$
3. Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  et la variance  $V(X)$
4. On considère l'événement  $A$  : "les 3 boules sont blanches" et on répète cette expérience exactement cinq fois

Soit  $Y$  la variable aléatoire associée au nombre de fois l'apparition de l'évènement  $A$

- a) Donner la loi de probabilité de  $Y$
- b) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de  $Y$